

1. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $\log_{10} x = 3$

Využijeme definici logaritmu: $\log_a x = y \iff a^y = x$. Dostaneme následující: $x = 10^3 = 1000$.

Příklad 1 (b) $2^x = \frac{1}{2}$

Pravou stranu převedeme na mocninu dvojky a porovnáme exponenty. (Toto funguje, neb exponenciála je prostá funkce.)

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = -1$$

Příklad 1 (c) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ je kladné číslo. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu. Řešení rovnice se tedy budou nacházet v prvním a druhém kvadrantu. Zjistíme řešení v prvním kvadrantu - označíme jej x_1 - pak odvodíme řešení ve druhém kvadrantu (x_2) a k oběma následně přičteme periodu.

$$x_1 = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Po přičtení periody dostáváme, že množina všech řešení zadané rovnice je množina: $\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (d) $\log_{10} x + \frac{4}{\log_{10} x} = 4$

Provedeme substituci $y = \log_{10} x$. Dostaneme tak rovnici - viz níže.

$$y + \frac{4}{y} = 4$$

$$y^2 + 4 = 4y$$

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(y - 2)^2 = 0$$

$$y = 2$$

Provedeme desubstituci, použijeme definici logaritmu a máme hotovo.

$$y = 2 \wedge y = \log_{10} x$$

$$\log_{10} x = 2$$

$$x = 10^2 = 100$$

Příklad 1 (e) $4 \cos^2 x + 3 = 8 \cos x$

Substitute: $y = \cos x$.

$$4y^2 - 8y + 3 = 0$$

$$4(y-1)^2 - 1 = 0$$

$$(y-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = \pm \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{3}{2}$$

Desubstitiue:

$$\begin{aligned} y_1 = \frac{1}{2} &\implies \cos x = \frac{1}{2} \implies x_1 = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, x_4 = 2\pi - x_1 = \frac{5\pi}{3} \implies \\ &\implies x \in \{x_1 + 2k\pi, x_4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$y_2 = \frac{3}{2} \implies \cos x = \frac{3}{2}, \text{ což nelze } \implies x \in \emptyset$$

Sloučíme výsledky z obou větví výpočtu a dostáváme:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Příklad 1 (f) $3 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x = 3$

Substitute: $y = 2^x, y^2 = 2^{2x}$

$$3y^2 + 8y = 3$$

$$3y^2 + 8y - 3 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{6} \implies y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = -3$$

Desubstitute:

$$y_1 \implies \frac{1}{3} = 2^x \implies x = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$y_2 \implies 2^x = -3 \text{ nelze } \implies x \in \emptyset$$

Po sloučení výsledků máme řešení: $x = \log_2 \frac{1}{3}$.

Příklad 1 (g) $\sin 2x = \cos x$

Pomocí vzorce $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ dostaneme násl. rovnici.

$$2 \sin x \cos x = \cos x$$

$$\cos x = 0 \implies x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos x \neq 0 \implies 2 \sin x = 1 \implies \sin x = \frac{1}{2} \implies x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ve druhé větvi výpočtu jsme rovnici vyřešili obdobně jako v příkladu 1 (c).

Sloučením výsledků z obou větví výpočtu dostáváme násl.: $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Příklad 1 (h) $\log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x)$

$$s \cdot \log_a r = \log_a r^s \implies \log(x^2 + 1) = \log((3 - x)^2)$$

$$\log \text{ je prostá fce } \implies x^2 + 1 = (3 - x)^2$$

$$x^2 + 1 = 9 - 6x + x^2$$

$$6x = 8$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Příklad 1 (i) $e^x + 12 \cdot e^{-x} = 7$

$$y := e^x \implies e^{-x} = \frac{1}{y}$$

$$y + \frac{12}{y} = 7$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y \in 3, 4$$

$$y = 3 \implies e^x = 3 \implies x = \ln 3$$

$$y = 4 \implies e^x = 4 \implies x = \ln 4$$

Sloučením výsledků dostáváme: $x \in \{\ln 3, \ln 4\}$.

Příklad 2 (a) $(x - 2)(x + 3) \geq 4x - 8$

$$(x - 2)(x + 3) - 4(x - 2) \geq 0$$

$$(x - 2)(x + 3 - 4) \geq 0$$

$$(x - 2)(x - 1) \geq 0$$

Dostali jsme rovnici v součinnovém tvaru. Výraz $x - 1$ je na intervalu $(-\infty, 1)$ záporný a pak je kladný. Výraz $x - 2$ je na intervalu $(-\infty, 2)$ záporný a pak je kladný. Zapišeme-li to do tabulky, dostaneme násl. tab.

výraz	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$(x - 2)$	−	−	+
$(x - 1)$	−	+	+
$(x - 2)(x - 1)$	+	−	+

Z tabulky plyne, že řešením je: $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$. (číslo 1 a 2 jsou v intervalech zahrnuta, neb v nerovnici je povolena rovnost (takže nulové body jsou též řešením))

Příklad 2 (b) $\frac{2x^2+1}{x^2+2x+2} < 1$

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+1}{x^2+2x+2} - 1 &< 0 \\ \frac{2x^2+1}{x^2+2x+2} - \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2} &< 0 \\ \frac{2x^2+1-x^2-2x-2}{x^2+2x+2} &< 0 \\ \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x+2} &< 0 \\ \frac{(x-1)^2-2}{(x+1)^2+1} &< 0 \\ \frac{(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))}{x^2+2x+2} &< 0\end{aligned}$$

Výše jsme k rozkladu na součin použili doplnění na čtverec a vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Z předposlední nerovnice je vidno, že jmenovatel zlomku je vždy kladný.

Získali jsme nerovnici v podílovém tvaru. Obdobně jako výše vytvoříme tabulku s intervaly a znamínky.

výraz	$(-\infty, 1 - \sqrt{2})$	$(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$	$(1 + \sqrt{2}), \infty)$
$(x - (1 - \sqrt{2}))$	–	+	+
$(x - (1 + \sqrt{2}))$	–	–	+
$(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$	+	–	+

Jelikož je jmenovatel vždy kladný, jde nám jen o kladnost čitatele. Z tabulky výše tedy dostáváme, že $x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, neb jsme chtěli, aby daný zlomek byl záporný.

Příklad 2 (c) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$

Opět anulujeme nerovnici, převedeme na stejného jmenovatele a vyřešíme nerovnici v podílovém tvaru.

$$\begin{aligned}\frac{x-2-2x+8}{2x-8} &\geq 0 \\ \frac{-x+6}{2x-8} &\geq 0\end{aligned}$$

výraz	$(-\infty, 4)$	$(4, 6)$	$(6, \infty)$
$-x+6$	+	+	–
$2x-8$	–	+	+
$\frac{-x+6}{2x-8}$	–	+	–

Z tabulky dostáváme, že $x \in (4, 6]$, přičemž číslo 4 není zahrnuto kvůli podmínkám a 6 je, neb je povolena rovnost.

Příklad 2 (d) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$

$$\begin{aligned}
& \frac{x+2}{x+3} - \frac{2x+3}{x+6} > 0 \\
& \frac{(x+2)(x+6) - (2x+3)(x+3)}{(x+3)(x+6)} > 0 \\
& \frac{x^2 + 8x + 12 - 2x^2 - 9x - 9}{(x+3)(x+6)} > 0 \\
& \frac{-x^2 - x + 3}{(x+3)(x+6)} > 0 \\
& \frac{(-1)(x^2 + x - 3)}{(x+3)(x+6)} > 0 \quad / \cdot (-1) \\
& \frac{x^2 + x - 3}{(x+3)(x+6)} < 0 \quad / \text{doplnění na čtverec} \\
& \frac{x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 3}{(x+3)(x+6)} < 0 \\
& \frac{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4}}{(x+3)(x+6)} < 0 \quad / a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\
& \frac{\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)}{(x+3)(x+6)} < 0
\end{aligned}$$

Nerovnice v podílovém tvaru.

výraz	$(-\infty, -6)$	$(-6, -3)$	$\left(-3, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$
$A := \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$	—	—	—	—	+
$B := \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$	—	—	—	+	+
$x+3$	—	—	+	+	+
$x+6$	—	+	+	+	+
$\frac{AB}{(x+3)(x+6)}$	+	—	+	—	+

V posledním řádku hledáme mínusy, neb v poslední nerovnosti (ze které jsme tu tabulku tvořili) je levá strana záporná. Získáváme tak řešení: $x \in (-6, -3) \cup \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Poznámka: Pokud bychom neudělali trik s přenásobením nerovnice výrazem (-1) , pak bychom řešili nerovnici $\frac{(-1)(x^2+x-3)}{(x+3)(x+6)} > 0$ - jako nerovnici v podílovém tvaru. Čili nejdříve bychom čitatele rozložili na součin:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{13}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \mp \sqrt{13}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Jelikož } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ tak platí: } -x^2 - x + 3 = -\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = \left(-x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$

Dále se postupujeme obdobně a vyjde totéž.

Příklad 2 (e) $\frac{x+2}{x^2+3x-4} \geq \frac{3}{x-2}$

$$\begin{aligned}
& \frac{x+2}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x-2} \geq 0 \\
& \frac{(x+2)(x-2) - 3(x^2+3x-4)}{(x^2+3x-4)(x-2)} \geq 0 \\
& \frac{x^2-4-3x^2-9x+12}{(x^2+3x-4)(x-2)} \geq 0 \\
& \frac{-2x^2-9x+8}{(x+4)(x-1)(x-2)} \geq 0 \\
& \frac{2x^2+9x-8}{(x+4)(x-1)(x-2)} \leq 0
\end{aligned}$$

Diskriminant k čitateli je: $81+4 \cdot 2 \cdot 8 = 81+64 = 145$. Čítec lze tedy rozložit na $\left(x - \frac{-9+\sqrt{145}}{4}\right) \left(x - \frac{-9-\sqrt{145}}{4}\right)$. Dostáváme násl. tedy nerovnost.

$$A := \frac{\left(x - \frac{-9+\sqrt{145}}{4}\right) \left(x - \frac{-9-\sqrt{145}}{4}\right)}{(x+4)(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Vyřešíme nerovnost v podílovém tvaru.

Označme: $a := \frac{-9-\sqrt{145}}{4}$, $b := \frac{-9+\sqrt{145}}{4}$

výraz	$(-\infty, a)$	$(a, -4)$	$(-4, b)$	$(b, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
A	-	+	-	+	-	+

Z tabulky plyne řešení: $x \in (-\infty, a] \cup (-4, b] \cup (1, 2)$. (krajní body jsou zahrnuty až na podmínky)

Příklad 2 (f) $||x-1|-2| < 1$

Využijeme definici absolutní hodnoty a nerovnici budeme řešit na jednotlivých intervalech zvlášť.

Podívejme se nejprve na $|x-1|$. Dle definice abs. hodnoty platí: $|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$. Nerovnici

můžeme tedy řešit zvlášť na intervalech $(-\infty, 1)$ a $[1, \infty)$. V prvním intervalu budeme místo $|x-1|$ psát $-x+1$ a v druhém intervalu $x-1$. Dostáváme tedy:

$$||x-1|-2| < 1 \tag{1}$$

$$x \in (-\infty, 1) \implies |-x+1-2| < 1 \implies |x+1| < 1 \implies x \in (-2, 0) \tag{2}$$

$$x \in [1, \infty) \implies |x-1-2| < 1 \implies |x-3| < 1 \implies (2, 4) \tag{3}$$

Přičemž nerovnici $|x+1| < 1$ řešíme následovně: na intervalu $(-\infty, -1)$ nahradíme abs. hodnotu výrazem $-x-1$ a na zbylém intervalu výrazem $x+1$. Dostáváme tak násl.

$$x < -1 \implies -x-1 < 1 \implies x+1 > -1 \implies x > -2$$

$$x \geq -1 \implies x+1 < 1 \implies x < 0$$

První z posledních dvou řádků říká: je-li $x < -1$, pak nutně musí být $x > 0$. Z toho plyne, že je-li splněno obojí (tj. jak $x < -1$, tak $x > -2$), platí i řešená nerovnost. Tj. dostáváme odsud, že řešením je mj. interval $(-2, -1)$. Druhý řádek nám říká: je-li $x \geq 1$, pak nutně musí být $x < 0$. Z toho dostáváme, že $x \in [-1, 0)$, což je řešením rovnice na intervalu $[-1, \infty)$ (neb pokud jsou splněny obě podmínky zároveň, tak nerovnost platí). Dohromady tedy dostáváme, že řešením nerovnice $|x + 1| < 1$ je $x \in (-2, -1) \cup [-1, 0) = (-2, 0)$.

Analogicky postupujeme při řešení nerovnice $|x - 3| < 1$ a dostaneme, že jejím řešením je interval $(2, 4)$.

Obdobnou interpretací dostáváme z 2 a 3 (viz výše), že řešením je: $((-\infty, 1) \cap (-2, 0)) \cup ([1, \infty) \cap (2, 4)) = (-2, 0) \cup (2, 4)$.

Příklad 2 (g) $|2x + 3| + |2x + 5| > |x - 1|$

Postupujeme analogicky jako dříve.

Nulové body výrazů v abs. hodnotách jsou: $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 1$. Budeme tedy řešit nerovnici na čtyřech různých intervalech. Pomocná tabulka níže nám ukazuje, na kterých intervalech budeme které absolutní hodnoty nahrazovat jakými výrazy.

	$(-\infty, -\frac{5}{2})$	$[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$	$[-\frac{3}{2}, 1)$	$[1, \infty)$
$ 2x + 3 $	$-2x - 3$	$-2x - 3$	$2x + 3$	$2x + 3$
$ 2x + 5 $	$-2x - 5$	$2x + 5$	$2x + 5$	$2x + 5$
$ x - 1 $	$-x + 1$	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$

- $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$

$$\begin{aligned} -2x - 3 - 2x - 5 &> -x + 1 \\ -3x &> 9 \\ x &< -3 \end{aligned}$$

Tedy: $x \in (-\infty, -3)$.

- $x \in [-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\begin{aligned} -2x - 3 + 2x + 5 &> -x + 1 \\ 1 &> -x \\ -1 &< x \end{aligned}$$

Tedy $x \in [-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) \cap (-1, \infty) = \emptyset$.

- $x \in [-\frac{3}{2}, 1)$

$$\begin{aligned} 2x + 3 + 2x + 5 &> -x + 1 \\ 4x + 8 &> -x + 1 \\ 5x &> -7 \\ x &> -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

Tedy: $x \in [-\frac{3}{2}, 1) \cap (-\frac{7}{5}, \infty) = (-\frac{7}{5}, 1)$.

- $x \in [1, \infty)$

$$2x + 3 + 2x + 5 > x - 1$$

$$4x + 8 > x - 1$$

$$3x > -9$$

$$x > -3$$

Tedy: $x \in [1, \infty) \cap (-3, \infty) = [1, \infty)$.

Sjednotíme výsledky ze všech intervalů a dostaneme: $x \in (-\infty, -3) \cup \emptyset \cup (-\frac{7}{5}, 1) \cup [1, \infty) = (-\infty, -3) \cup (-\frac{7}{5}, \infty)$.

Příklad 2 (h) $|x + 2| > |x + 1| + x$

Nulové body abs. hodnot: $-2, -1$.

	$(-\infty, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, \infty)$
$ x + 2 $	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$ x + 1 $	$-x - 1$	$-x - 1$	$x + 1$

- $x \in (-\infty, -2)$

$$-x - 2 > -x - 1 + x$$

$$-x - 2 > -1$$

$$-x > 1$$

$$x < -1$$

Tedy: $x \in (-\infty, -2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2)$.

- $x \in [-2, -1)$

$$x + 2 > -x - 1 + x$$

$$x + 2 > -1$$

$$x > -3$$

Tedy $x \in [-2, -1) \cap (-3, \infty) = [-2, -1)$

- $x \in [-1, \infty)$

$$x + 2 > 2x + 1$$

$$1 > x$$

Tedy $x \in [-1, \infty) \cap (-\infty, 1) = [-1, 1)$.

Sjednocením výsledků ze všech intervalů dostáváme: $x \in (-\infty, -2) \cup [-2, -1) \cup [-1, 1) = (-\infty, 1)$.

Příklad 2 (i) $|x + 1| - |x + 3| < 1$

	$(-\infty, -3)$	$[-3, -1)$	$[-1, \infty)$
$ x + 1 $	$-x - 1$	$-x - 1$	$x + 1$
$ x + 3 $	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$

- $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned} -x - 1 - (-x - 3) &< 1 \\ 2 &< 1 \end{aligned}$$

Tedy $x \in \emptyset$.

- $x \in [-3, -1)$

$$\begin{aligned} -x - 1 - (x + 3) &< 1 \\ -2x - 4 &< 1 \\ -2x &< 5 \\ x &> -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Tedy: $x \in [-3, -1) \cap (-\frac{5}{2}, \infty) = (-\frac{5}{2}, -1)$.

- $x \in [-1, \infty)$

$$\begin{aligned} x + 1 - (x + 3) &< 1 \\ -2 &< 1 \end{aligned}$$

Tedy $x \in [-1, \infty) \cap \mathbb{R} = [-1, \infty)$.

Sjednocení výsledků: $x \in \emptyset \cup (-\frac{5}{2}, -1) \cup [-1, \infty) = (-\frac{5}{2}, \infty)$.

Příklad 2 (j) $|x + |x + 2|| < 4x$

Levá strana nerovnosti je nezáporná. Rovnici má proto smysl řešit jen na nezáporných číslech (nebo pro $x < 0$ by byla levá strana nezáporná a pravá záporná, tedy zjevně taková x nejsou řešením nerovnice).

Uvažujme tedy $x \geq 0$. Pak očividně $|x + 2| = x + 2$ a $|x + |x + 2|| = |x + x + 2| = 2x + 2$. Dostáváme tak: $2x + 2 < 4x \implies 2 < 2x \implies x > 1$. Řešením je tedy: $x \in (1, \infty)$.

Tradiční cesta:

- $x < -2 \implies |x + 2| = -x - 2$

$$\begin{aligned} |x - x - 2| &< 4x \\ 2 &< 4x \\ \frac{1}{2} &< x \end{aligned}$$

Tedy $x \in (-\infty, -2) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = \emptyset$.

- $x \geq -2 \implies |x + 2| = x + 2$

$$|2x + 2| < 4x$$

- $x < -1 \implies |2x + 2| = -2x - 2$

$$-2x - 2 < 4x$$

$$-2 < 6x$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

Tedy $x \in [-2, \infty) \cap (-\infty, -1) \cap (-\frac{1}{3}, \infty) = \emptyset$.

- $x \geq -1 \implies |2x + 2| = 2x + 2$

$$2x + 2 < 4x$$

$$2 < 2x$$

$$x > 1$$

Tedy $x \in [-2, \infty) \cap [-1, \infty) \cap (1, \infty) = (1, \infty)$.

Sjednocení výsledků: $x \in \emptyset \cup \emptyset \cup (1, \infty) = (1, \infty)$.

Příklad 2 (k) $x^2 + 1 - |x + 2| > 0$

- $x \in (-\infty, -2) \implies |x + 2| = -x - 2$

$$x^2 + 1 + x + 2 > 0$$

$$x^2 + x + 3 > 0$$

$$D = 1 - 12 < 0$$

Parabola funkce $y = x^2 + x + 3$ má tvar údolí (koeficient u kvadratického členu je kladný). Diskriminant je záporný, tedy parabola neprotíná osu x . Z toho vyplývá, že parabola je celá nad osou, čili kvadratický trojčlen $x^2 + x + 3$ je vždy kladný.

Tedy $x \in (-\infty, -2)$.

- $x \in [-2, \infty) \implies |x + 2| = x + 2$

$$x^2 + 1 - x - 2 > 0$$

$$x^2 - x - 1 > 0$$

$$D = 5 \implies x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} > -2, x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

Parabola funkce $y = x^2 - x - 1$ je ve tvaru údolí (koeficient u kvadratického členu je kladný). tedy Kvadratický trojčlen je kladný na $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

Řešením je zde tedy:

$$x \in [-2, \infty) \cap \left(\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \right) = \left[-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right).$$

Sjednocení výsledků:

$$x \in (-\infty, -2) \cup \left[-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right).$$

Příklad 2 (1) $\log_2(x^2 + |x + 6| - 1) > 0$

Podmínky:

$$x^2 + |x + 6| - 1 > 0$$

$$x^2 + |x + 6| > 1$$

Pokud $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, pak $x^2 \geq 1$, tedy podmínka je splněna, neb abs. hodnota je vždy ≥ 0 .

Pokud $x \in (-1, 1)$, pak $|x + 6| \geq 5$, a podmínka je opět splněna.

Podmínka je tedy splněna vždy.

- $x \in (-\infty, -6) \implies |x + 6| = -x - 6$

$$\log_2(x^2 + (-x - 6) - 1) > 0$$

$$\log_2(x^2 - x - 7) > \log_2 1$$

$$x^2 - x - 7 > 1 \text{ (logaritmus při základě dvou je rostoucí funkce)}$$

$$x^2 - x - 8 > 0$$

$$D = 33, x_1 = \frac{1 - \sqrt{33}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$$

Parabola je ve tvaru údolí.

Tedy poslední nerovnost má řešení: $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}, \infty\right)$.

Tedy: $x \in (-\infty, -69) \cap \left(\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}, \infty\right) \right) = (-\infty, -6)$.

- $x \in [-6, \infty)$

$$\log_2(x^2 + x + 5) > 0 = \log_2 1$$

$$x^2 + x + 5 > 1$$

$$x^2 + x + 4 > 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 1 - 16 < 0$$

Parabola ve tvaru údolí a záporný diskriminant $\implies$ parabola nad osou $x \implies$ trojčlen vždy kladný.

Tedy $x \in [-6, \infty) \cap \mathbb{R} = [-6, \infty)$.

Sloučení výsledků: $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2 (m) $\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 3) \leq 0$

Podmínky: $x^2 - 3x + 3 > 0$. Jelikož jde o parabolu ve tvaru údolí se záporným diskriminantem, tak je tato podmínka psněna vždy.

Logaritmus při základu $\frac{1}{6}$ je klesající. Dostáváme tedy násl.

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 3 &\geq 1 \\x^2 - 3x + 2 &\geq 0 \\(x - 2)(x - 1) &\geq 0\end{aligned}$$

Vyřešením této nerovnosti v součinném tvaru dostáváme: $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

Příklad 3 (a) $|x(x + 2)| > a$

Abs. hodnota je vždy nezáporná. Proto je-li $a < 0$, pak řešením jsou všechna reálná čísla. Pokud $a = 0$, pak řešením jsou $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$.

Předpokládejme nyní, že $a > 0$.

- $x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty) \implies |x(x + 2)| = x^2 + 2x$

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - a &> 0 \\D &= 4 + 4a\end{aligned}$$

Jelikož je $a > 0$ (předpokládáme), tak $D > 0$. Řešením poslední nerovnice je tedy mn. $(-\infty, -1 - \sqrt{1 + a}) \cup (-1 + \sqrt{1 + a}, \infty)$.

Z této větve dostáváme řešení:

$$((-\infty, -1 - \sqrt{1 + a}) \cup (-1 + \sqrt{1 + a}, \infty)) \cap ((-\infty, -2] \cup [0, \infty)) = (-\infty, -1 - \sqrt{1 + a}) \cup (-1 + \sqrt{1 + a}, \infty),$$

neb $a > 0$.

- $x \in (-2, 0) \implies |x(x + 2)| = -x^2 - 2x$

$$\begin{aligned}-x^2 - 2x - a &> 0 \\x^2 + 2x + a &< 0 \\D &= 4 - 4a\end{aligned}$$

Pokud $D < 0$ (**tj.** $a > 1$), tak nerovnice na tomto intervalu **nemá řešení**.

Pokud $a \leq 1$, tak je **řešením**: $x \in (-1 - \sqrt{1 - a}, -1 + \sqrt{1 - a})$.

Jelikož $(-1 - \sqrt{1 - a}, -1 + \sqrt{1 - a}) \subseteq (-2, 0)$, tak jde o **řešení** z této větve příkladu.

Závěr:

$$a < 0 \implies x \in \mathbb{R}$$

$$a = 0 \implies x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$$

$$a \in (0, 1] \implies x \in (-\infty, -1 - \sqrt{1 + a}) \cup (-1 - \sqrt{1 - a}, -1 + \sqrt{1 - a}) \cup (-1 + \sqrt{1 + a}, \infty)$$

$$a \in (1, \infty) \implies x \in (-\infty, -1 - \sqrt{1 + a}) \cup (-1 + \sqrt{1 + a}, \infty)$$

Příklad 3 (b) $||x| - 2| < a$

Zřejmě pro $a \leq 0$ nerovnice nemá řešení, neb levá strana je nezáporná.

Předpokládejme $a > 0$.

- $x \geq 0 \implies |x| = x$

$$|x - 2| < a$$

- $x > 2 \implies |x - 2| = x - 2$

$$x - 2 < a$$

$$x < 2 + a$$

Tedy $x \in [0, \infty) \cap (2, \infty) \cap (-\infty, 2 + a) = (2, 2 + a)$. (neb $a > 0$, tedy $2 + a > 2$)

- $x \leq 2 \implies |x - 2| = 2 - x$

$$2 - x < a$$

$$2 - a < x$$

$$\text{Tedy: } x \in [0, \infty) \cap (-\infty, 2] \cap (2 - a, \infty) = [0, 2] \cap (2 - a, \infty) = \begin{cases} (2 - a, 2], & a \in (0, 2] \\ [0, 2], & a \in (2, \infty) \end{cases}$$

- $x < 0 \implies |x| = -x$

$$|-x - 2| = |x + 2| < a$$

- $x \leq -2 \implies |x + 2| = -x - 2$

$$-x - 2 < a$$

$$x > -2 - a$$

Tedy $x \in (-\infty, 0) \cap (-\infty, -2] \cap (-2 - a, \infty) = (-2 - a, -2]$.

- $x > -2 \implies |x + 2| = x + 2$

$$x + 2 < a$$

$$x < a - 2$$

$$\text{Tedy: } x \in (-\infty, 0) \cap (-2, \infty) \cap (-\infty, a - 2) = \begin{cases} (-2, a - 2), & a \in (0, 2] \\ (-2, 0), & a \in (2, \infty) \end{cases}$$

Závěr:

$$a \leq 0 \implies x \in \emptyset$$

$$a \in (0, 2] \implies x \in (2, 2 + a) \cup (2 - a, 2] \cup (-2 - a, -2] \cup (-2, a - 2) = (-2 - a, a - 2) \cup (2 - a, 2 + a)$$

$$a \in (2, \infty) \implies x \in (2, 2 + a) \cup [0, 2] \cup (-2 - a, -2] \cup (-2, 0) = (-2 - a, 2 + a)$$

Příklad 3 (c) $|x^2 + 2x| < a + 2x$

$$x^2 + 2x = x(x + 2)$$

- $x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty) \implies |x^2 + 2x| = x^2 + 2x$

$$x^2 + 2x < a + 2x$$

$$x^2 < a$$

$$x^2 - a < 0$$

Zřejmě pro $a \leq 0$ nerovnice nemá řešení.

Pro $a > 0$ je řešením $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a}) \cap ((-\infty, -2] \cup [0, \infty)) = \begin{cases} (-\sqrt{a}, -2] \cup [0, \sqrt{a}), & a \in (4, \infty) \\ [0, \sqrt{a}), & a \in (0, 4] \end{cases}.$

- $x \in (-2, 0) \implies |x^2 + 2x| = -x^2 - 2x$

$$-x^2 - 2x - 2x - a < 0$$

$$x^2 + 4x + a > 0$$

$$D = 16 - 4a$$

Je-li $D < 0$, tj. $a > 4$, pak řešením je $(-2, 0)$.

Pokud $a \leq 4$, parabola je nad osou x na množině $(-\infty, -2 - \sqrt{4 - a}) \cup (-2 + \sqrt{4 - a}, \infty)$. Řešením je tedy $x \in \begin{cases} (-2 + \sqrt{4 - a}, 0), & a \in (0, 4] \\ \emptyset, & a \in (-\infty, 0] \end{cases}.$

Závěr:

$$a \leq 0 \implies x \in \emptyset$$

$$a \in (0, 4] \implies x \in [0, \sqrt{a}) \cup (-2 + \sqrt{4 - a}, 0) = (-2 + \sqrt{4 - a}, \sqrt{a})$$

$$a > 4 \implies x \in (-\sqrt{a}, -2] \cup [0, \sqrt{a}) \cup (-2, 0) = (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$$

Příklad 3 (d) $a(a - 1)x < 2^{2137} - 1$

Zřejmě pro $a = 0$ a $a = 1$ jsou řešením všechna reálná čísla.

Pro $a < 0$ nebo $a > 1$ je $a(a - 1) > 0$ a řešením je $x \in \left(-\infty, \frac{2^{2137} - 1}{a(a - 1)}\right)$.

Pro $0 < a < 1$ je řešením $x \in \left(\frac{2^{2137} - 1}{a(a - 1)}, \infty\right)$.

Příklad 3 (e) $x^2 + ax < 0$

$$x(x + a) < 0$$

Tedy mezi $-a$ a 0 je $x^2 + ax$ záporný výraz. Tj. řešením je $x \in \begin{cases} (0, -a), & a < 0 \\ \emptyset, & a = 0. \\ (-a, 0), & a > 0 \end{cases}$

Příklad 3 (f) $|x| + |x + 1| < a$

Zřejmě pro $a \leq 0$ nerovnice nemá řešení.

Předpokládejme, že $a > 0$.

- $x \in (-\infty, -1) \implies |x| = -x, |x+1| = -x-1$

$$\begin{aligned} -x - x - 1 &< a \\ -2x &< a + 1 \\ x &> -\frac{a+1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } x \in (-\infty, -1) \cap \left(-\frac{a+1}{2}, \infty\right) = \begin{cases} \left(-\frac{a+1}{2}, -1\right), & a \in (1, \infty) \\ \emptyset, & a \in (0, 1] \end{cases}.$$

- $x \in [-1, 0] \implies |x| = -x, |x+1| = x+1$

$$\begin{aligned} -x + x + 1 &< a \\ 1 &< a \end{aligned}$$

Pro $a \in (1, \infty)$ je řešením $x \in [-1, 0]$, pro $a \in (0, 1]$ nerovnice nemá řešení.

- $x \in (0, \infty) \implies |x| = x, |x+1| = x+1$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &< a \\ x &< \frac{a-1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } x \in (0, \infty) \cap \left(-\infty, \frac{a-1}{2}\right) = \begin{cases} \left(0, \frac{a-1}{2}\right), & a \in (1, \infty) \\ \emptyset, & a \in (0, 1] \end{cases}.$$

Závěr:

$$a \leq 1 \implies x \in \emptyset$$

$$a > 1 \implies x \in \left(-\frac{a+1}{2}, \frac{a-1}{2}\right)$$

Příklad 3 (g) $1 \leq |ax+1| < 2$

Zda je $ax+1$ rostoucí či klesající závisí hodnotě a . Proto nejdříve rozlišíme případy podle a .

- $a = 0 \implies x \in \mathbb{R}$

- $a < 0$

- $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{a}\right] \implies |ax+1| = ax+1$

$$\begin{aligned} 1 &\leq ax+1 < 2 \\ 0 &\leq ax < 1 \\ 0 &\geq x > \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } x \in \left(\frac{1}{a}, 0\right).$$

- $x \in \left(-\frac{1}{a}, \infty\right) \implies |ax+1| = -ax-1$

$$1 \leq -ax - 1 < 2$$

$$2 \leq -ax < 3$$

$$-\frac{2}{a} \leq x < -\frac{3}{a}$$

$$\text{Tedy } x \in \left[-\frac{2}{a}, -\frac{3}{a}\right).$$

$$\bullet a > 0$$

$$\circ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{a}\right] \implies |ax + 1| = -ax - 1$$

$$1 \leq -ax - 1 < 2$$

$$2 \leq -ax < 3$$

$$-\frac{2}{a} \geq x > -\frac{3}{a}$$

$$\text{Tedy } x \in \left(-\frac{3}{a}, -\frac{2}{a}\right].$$

$$\circ x \in \left(-\frac{1}{a}, \infty\right) \implies |ax + 1| = ax + 1$$

$$1 \leq ax + 1 < 2$$

$$0 \leq ax < 1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{a}$$

$$\text{Tedy } x \in \left[0, \frac{1}{a}\right).$$

Závěr:

$$a = 0 \implies x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies x \in \left[-\frac{2}{a}, -\frac{3}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{a}, 0\right)$$

$$a > 0 \implies x \in \left(-\frac{3}{a}, -\frac{2}{a}\right] \cup \left[0, \frac{1}{a}\right)$$

Příklad 3 (h) $\frac{a}{x} - \frac{4}{ax} = 1 - \frac{2}{a}$

Podmínky: $x \neq 0, a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} - \frac{4}{ax} &= 1 - \frac{2}{a} \\ \frac{a^2 - 4}{ax} &= \frac{ax - 2x}{ax} \\ a^2 - 4 &= (a - 2)x \end{aligned}$$

$$\bullet a = 2 \implies x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet a \neq 2 \implies x = \frac{a^2 - 4}{a - 2} = a + 2$$

Příklad 3 (i) $a \cdot x^2 + 2x - a + 2 = 0$

$$ax^2 + 2x + (2 - a) = 0$$

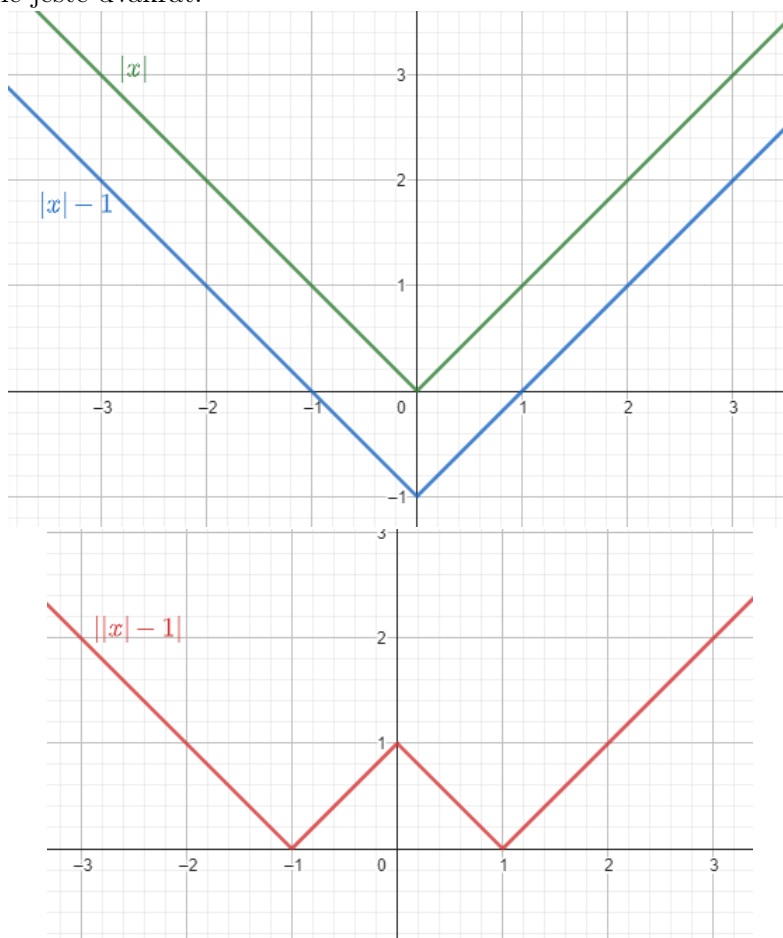
$$D = 4 - 4a(2 - a) = 4(1 - 2a + a^2) = 4(a - 1)^2 \geq 0$$

- $a = 0 \implies 2x + 2 = 0 \implies x = -1$

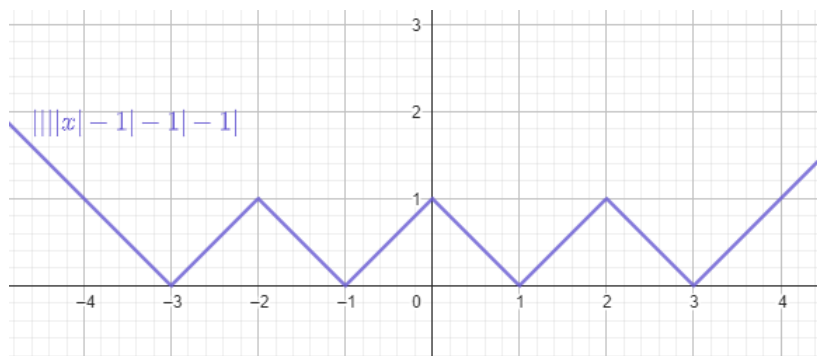
- $a \neq 0 \implies x \in \{-1, \frac{a-2}{a}\}$

Příklad 4 (a) $f(x) = |||x| - 1| - 1| - 1|$

Začneme odprostřed. Narýsujeme graf funkce $y = |x|$. Příslušný graf posuneme o 1 dolů a části, které jsou pod osou x převrátíme nahoru. Tak dostaneme graf funkce $||x| - 1|$. Tento postup (posun a převrácení) opakujeme ještě dvakrát.



Výsledný graf:



Příklad 4 (b) $f(x) = \left| \frac{3x+1}{2x-4} \right|$

Nejdříve Zjistíme graf vnitřní funkce, pak části, které jsou pod osou x , převrátíme a získáme tak kýžený graf.

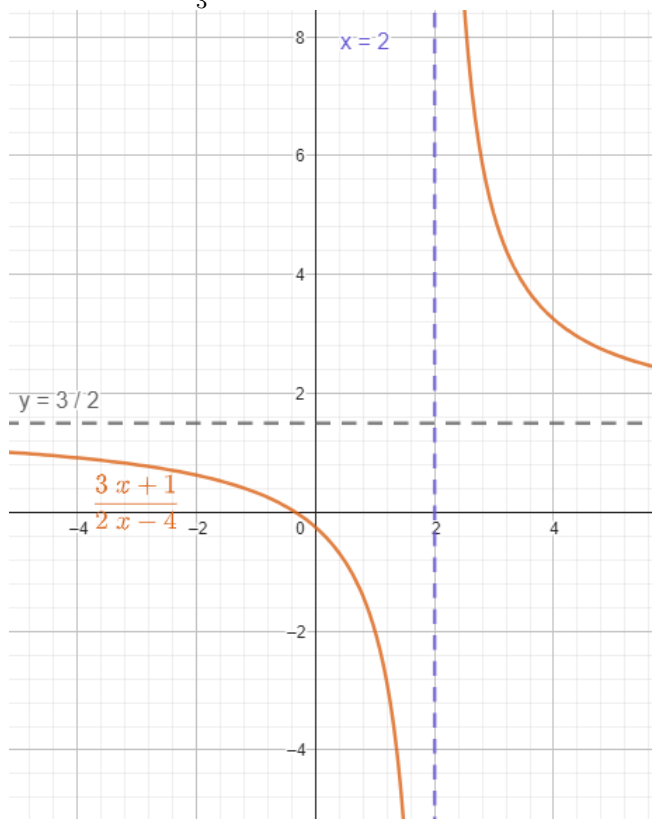
$$g(x) = \frac{3x+1}{2x-4} = \frac{3(x-2)+7}{2(x-2)} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2x-4}$$

Grafem funkce g je hyperbola. Je tedy třeba určit její asymptoty a průsečíky s osami. Funkce g není definována v hodnotě 2 - jinými slovy $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Svislou asymptotou grafu je tedy přímka $x = 2$. Vodorovná asymptota je $y = \frac{3}{2}$ (jde o hodnotu, které jako jediné funkce nenabývá, neb $\frac{7}{2x-4} \neq 0$).

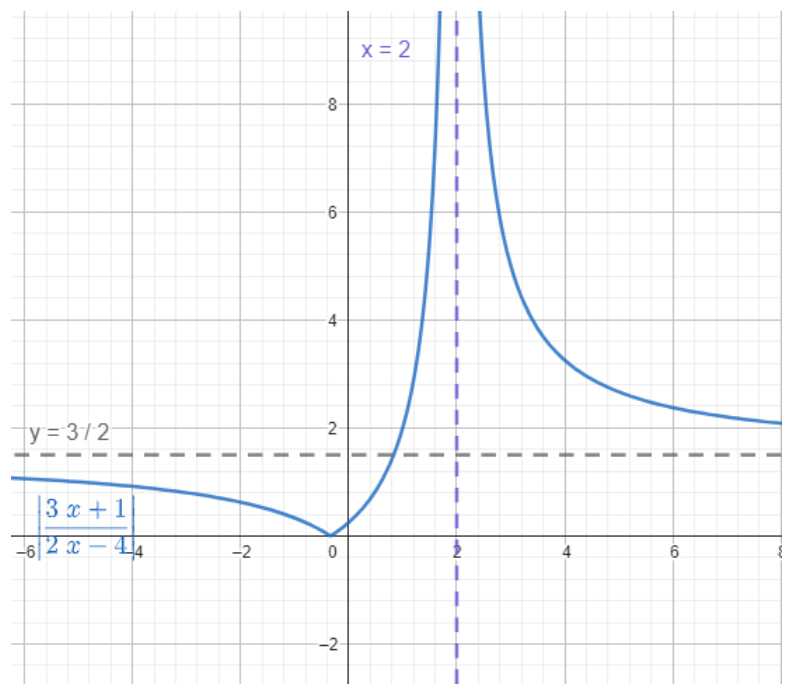
Dopočtěk ještě průsečíky s osami.

$$x = 0 \implies g(x) = \frac{3 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 0 - 4} = -\frac{1}{4}.$$

$$g(x) = 0 \implies 3x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{3}$$



Výsledný graf:

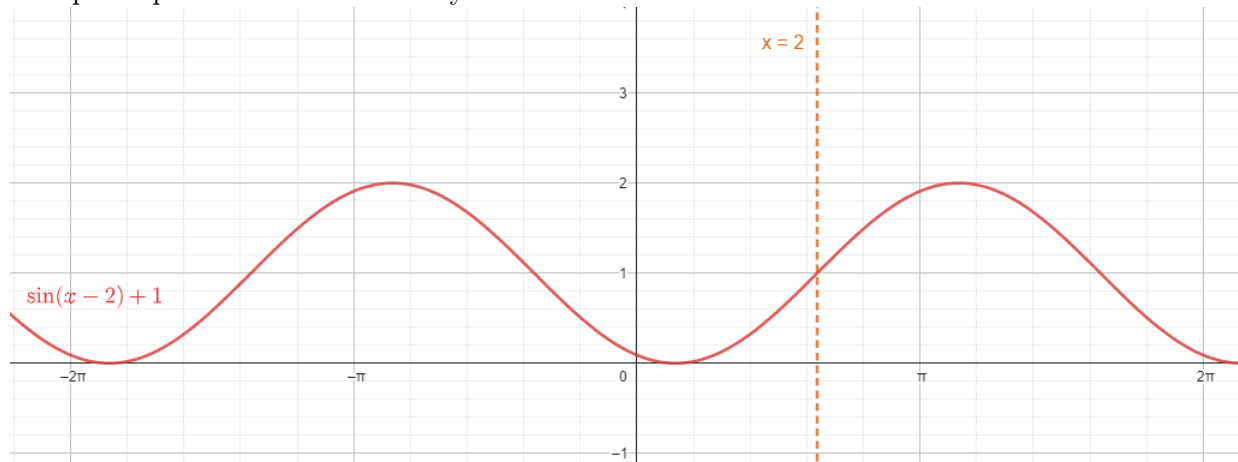


Příklad 4 (c) $f(x) = |\sin(2 - x) - 1|$

$$f(x) = |\sin(-(x - 2)) - 1| = |-\sin(x - 2) - 1| = |\sin(x - 2) + 1|$$

Graf $\sin$, posunout o 2 doprava a o 1 nahoru a pak aplikovat absolutní hodnotu.

Graf před aplikováním abs. hodnoty:

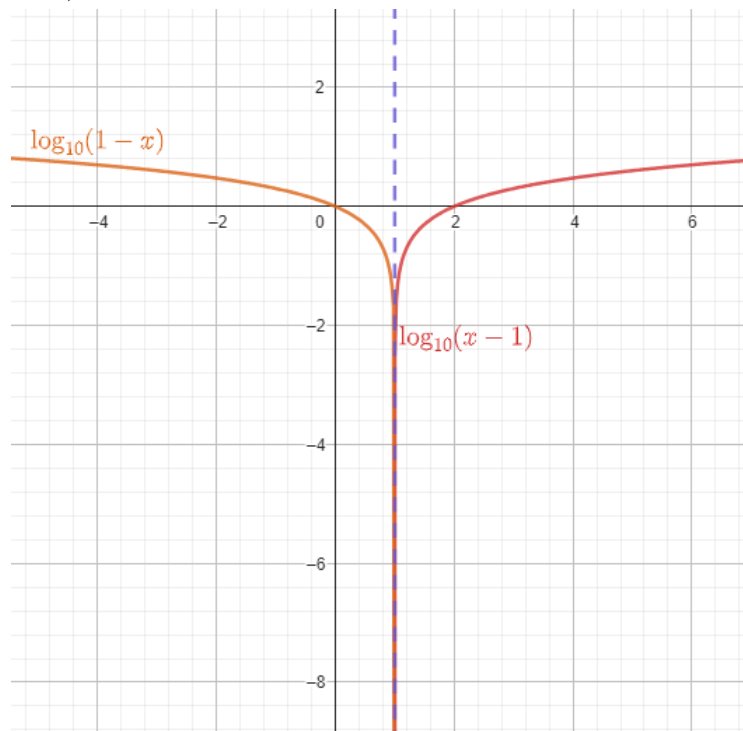


Je vidno, že abs. hodnota s grafem nic neudělá, neb graf je celý nad osou x nebo na ní.

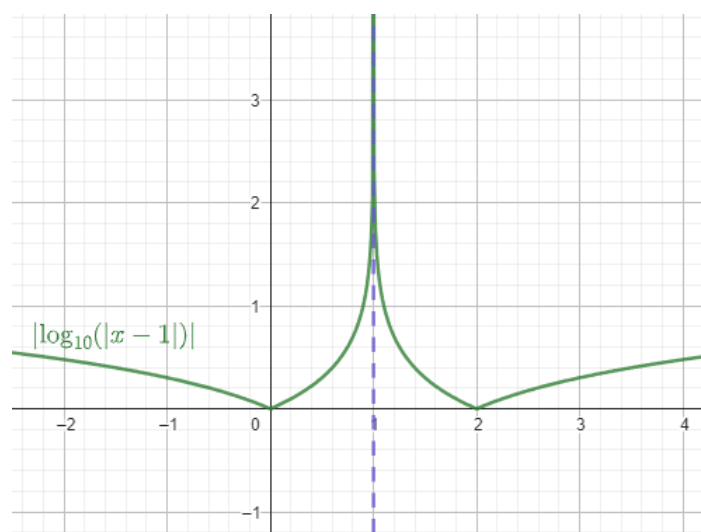
Příklad 4 (d) $f(x) = |\log|x - 1||$

Logaritmus je definovaný na celém oboru hodnot funkce $y = |x - 1|$ vyjma nuly. Z definice absolutní hodnoty plyne:

$$\log|x - 1| = \begin{cases} \log(x - 1), & x > 1 \\ \log(1 - x), & x < 1 \end{cases}.$$

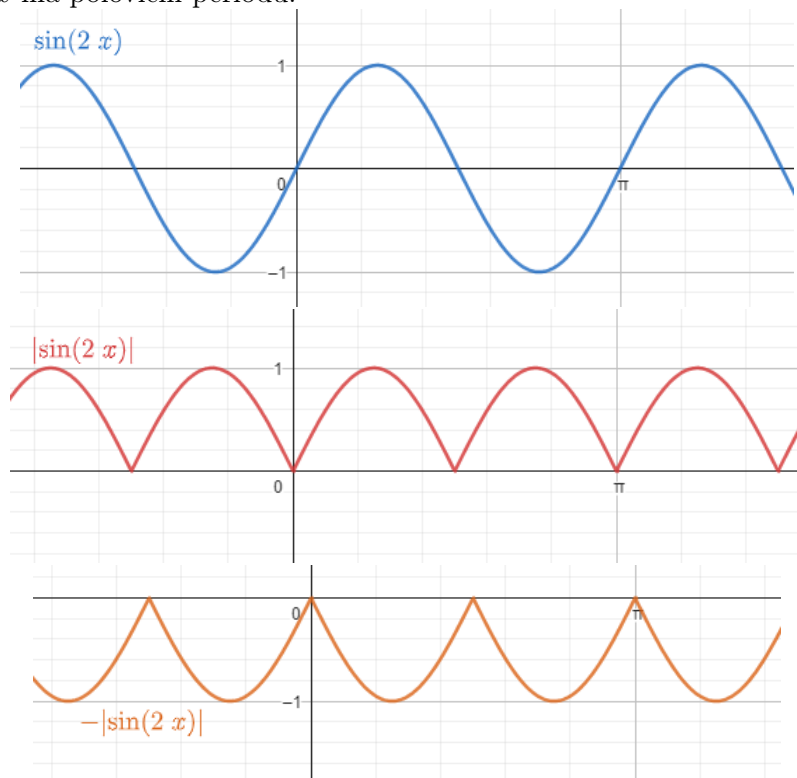


Výsledný graf:



Příklad 4 (e) $f(x) = 1 - |\sin 2x|$

Funkce $y = \sin 2x$ má poloviční periodu.



Výsledný graf:

